SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR USANDO O AMBIENTE DE MODELAGEM GUSEK

[1]BERTOL, Omero Francisco; [2]DOSCIATTI, Eden Ricardo; [3]MAGATÃO, Leandro

[1]omero@utfpr.edub.br, [2]edenrd@utfpr.edu.br, [3]magatao@utfpr.edu.br
[1,2,3]UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Sede Curitiba.
CPGEI - Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial.
Av. Sete de Setembro 3165, 80230-901, Curitiba, PR, Brasil.
[1,2]UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Pato Branco.
GETIC - Grupo de Estudos e Pesquisa em Tecnologias de Informação e Comunicação.
Via do Conhecimento, Km 01, Caixa Postal 571, 85501-970, Pato Branco, PR, Brasil.

Resumo - A Pesquisa Operacional é um ramo interdisciplinar da matemática aplicada que objetiva fornecer ferramentas quantitativas como forma de apoiar o processo de tomada de decisões. A Programação Linear, no campo da Programação Matemática, é uma subárea da Pesquisa Operacional que abrange a análise de sistemas complexos do mundo real, tipicamente buscando alocação ótima dos recursos envolvidos para melhorar ou aperfeiçoar o desempenho para atingir um objetivo. Este trabalho apresenta a implementação da solução de um problema de Programação Linear usando o ambiente de modelagem GUSEK, um *software* livre para o desenvolvimento de modelos de Programação Linear e Linear Inteira Mista.

Palavras-chave: Pesquisa Operacional, Programação Matemática, Programação Linear, GUSEK.

INTRODUÇÃO

Durante a Segunda Guerra Mundial, um grupo de cientistas foi convocado na Inglaterra para estudar problemas de natureza logística, de tática de guerra e de estratégia militar de grande dimensão e complexidade associados com a defesa do país. O objetivo era decidir sobre a utilização mais eficaz de recursos militares limitados. A convocação e a realização deste grupo marcou a primeira atividade formal de "Pesquisa Operacional" **[1]**.

A Pesquisa Operacional (PO) é um ramo interdisciplinar da matemática aplicada que faz uso de modelos matemáticos, estatísticos e de algoritmos, fornecendo ferramentas quantitativas como forma de apoiar o processo de tomada de decisões. É usada, sobretudo para analisar sistemas complexos do mundo real, tipicamente com o objetivo de melhorar ou aperfeiçoar o desempenho **[2]**.

O uso de técnicas da PO na modelagem das estratégias de planejamento e programação da produção tem se mostrado como um fator decisivo para o desenvolvimento de políticas otimizadas de operação industrial. O mercado brasileiro vem despertando para o grande potencial econômico apresentando por este tipo de modelagem, uma vez que, os modelos obtidos evidenciam procedimentos que levam a diminuição dos custos produtivos **[2]**.

Um modelo é uma representação de um sistema real, que pretende reproduzir o funcionamento ou definir a estrutura ideal de um sistema, de modo a aumentar sua produtividade. A confiabilidade da solução obtida através do modelo depende da validação do modelo na representação do sistema real. A diferença entre a solução real e a solução proposta pelo modelo depende diretamente da precisão do modelo em descrever o comportamento original do sistema **[1]**. O conceito de modelo como uma visão simplificada da realidade é essencial nos estudos da PO **[2]**.

Na PO a subárea denominada Programação Matemática[1] emprega "símbolos matemáticos" na construção de modelos para, a partir da idealização da realidade, representar as variáveis do sistema real **[3]**.

---

[1] Neste contexto, *programação* é utilizado no sentido de *planejamento* e não deve ser confundido com a expressão correlata presente na área computacional **[2]**.

Os modelos de Programação Matemática podem ser entendidos como um conjunto de equações, inequações e dependências lógicas que correspondem a relacionamentos apresentados por estruturas reais [2]. Em um modelo matemático, são incluídos três conjuntos principais de elementos [1], [2]:

(1) Variáveis de decisão e parâmetros: as variáveis de decisão são as incógnitas a serem determinadas pela solução do modelo (entradas) e os parâmetros são valores fixos do problema;
(2) Restrições: de modo a levar em conta as limitações físicas do sistema, o modelo deve incluir restrições que limitam os valores possíveis (ou viáveis) das variáveis;
(3) Função objetivo: é uma função matemática que define a qualidade da solução em função das variáveis de decisão empregadas. Engloba considerações de "maximização" de lucros ou "minimização" de custos, por exemplo.

METODOLOGIA

Um estudo de Pesquisa Operacional geralmente envolve as seguintes fases: a) definição do problema; b) construção do modelo; c) solução do modelo; d) validação do modelo; e, e) implementação da solução [1].

Para exemplificar a identificação dos elementos de um modelo de Programação Matemática, será considerado o problema apresentado no Quadro 1 (fase de definição do problema).

Quadro 1- Problema a ser modelado no estudo de Pesquisa Operacional [2].

Uma fábrica produz dois tipos de produtos: básico e luxo. Cada tipo básico requer 4 horas de corte e 2 horas de polimento; cada tipo luxo requer 2 horas de corte e 5 horas de polimento. A fábrica possui 2 cortadoras e 3 polidoras. A semana de trabalho da fábrica é de 40 horas. Cada tipo básico dá um lucro de \$3,00 (três unidades monetárias) e cada tipo luxo \$4,00. Deseja-se saber qual a produção da fábrica que maximiza o lucro.

No problema apresentado no Quadro 1, as variáveis de decisão são as quantidades de produtos do tipo básico e luxo que deverão ser produzidas. Os parâmetros fornecidos são o valor da jornada semanal de trabalho, o número de máquinas cortadoras e polidoras, a quantidade de horas de corte e polimento para produzir os produtos e o lucro obtido com cada tipo de produto comercializado. As restrições são o número de horas consumidas nas cortadoras e polidoras para produzir os produtos. A função objetivo é a função matemática para determinar o lucro em função das variáveis de decisão e que deve ser maximizada. A visão geral do modelo matemático modelado identificando seus elementos pode ser observada no Quadro 2 (fase de construção, solução e validação do modelo).

Quadro 2- Elementos do modelo matemático criado.

(1) Variáveis de decisão:	xb = quantidade de produto básico a produzir [valor dado em unidades, un.]
	xl = quantidade de produto luxo [un.]
Parâmetros (dados):	Semana de trabalho → 40h
	Disponibilidade das 2 cortadoras em uma semana → 2 x 40h = 80h
	Disponibilidade das 3 polidoras em uma semana → 3 x 40h = 120h
	Produção do produto básico envolve → 4h da cortadora + 2h da polidora
	Produção do produto luxo envolve → 2h da cortadora + 5h da polidora
(2) Conjunto de restrições:	$4.xb + 2.xl \leq 80$
	$2.xb + 5.xl \leq 120$
(3) Função objetivo:	maximizar o lucro (z) = $3.xb + 4.xl$

A formulação do modelo matemático depende diretamente do sistema a ser representado. A função objetivo e o conjunto de restrições podem ser lineares ou não lineares.

As variáveis de decisão podem ser contínuas ou discretas (por exemplo, inteiras) e os parâmetros podem ser determinísticos ou probabilísticos. O resultado dessa diversidade de representações de sistemas é o desenvolvimento de diversas técnicas de otimização, de modo a resolver cada tipo de modelo existente. Estas técnicas incluem, principalmente: **Programação Linear** (restrições e função objetivo são lineares[2]), Programação Inteira, Programação Dinâmica, Programação Estocástica, Programação Não Linear e **Programação Linear Inteira Mista** (variáveis de decisão devem assumir valores inteiros) [1], [2].

Na fase de implementação da solução os elementos devem ser convertidos em regras operacionais através de um *software* de computador conhecido como *solver*. Um *solver* é uma ferramenta computacional que permite resolver equações com diversas variáveis desconhecidas. O objetivo do processo realizado no *solver* é localizar os valores de variáveis de uma equação que resultam em um valor otimizado para a função objetivo [2].

Atualmente [2], várias empresas disponibilizam *solvers* com métodos de solução de modelos de Programação Linear. Como alternativas de versões comerciais pode-se citar o *IBM-CPLEX* da IBM e o *Solver Excel* da Microsoft. Como opções de *software* livre tem-se o *LP_Solve* da LGPL (*Lesser General Public License*) e o GLPK (*GNU Linear Programming*).

RESULTADOS

O ambiente de modelagem GUSEK [4] foi utilizado na implementação do modelo matemático apresentado no Quadro 2. O GUSEK é uma interface de desenvolvimento para modelos de Programação Linear (*LP- Linear Programming*) e Programação Linear Inteira Mista (*MILP- Mixed Integer Programming Linear*). O pacote consiste em uma versão customizada do editor de textos SciTE (*SCIntilla Text Editor*) [5] integrada a uma versão pré-compilada do *solver* GLPK (*GNU Linear Programming Kit*) [6] para a plataforma Win32.

Os principais comandos usados no GUSEK para escrever e resolver um modelo matemático são: a) `var`: declaração das variáveis de decisão; b) `subject to`: declaração das restrições; c) `maximize`: maximizar o valor da função objetivo; d) `minimize`: minimizar o valor da função objetivo; e) `solve`: executar o modelo; f) `printf`: apresentar resultados no dispositivo de saída; e g) `end`: finalizar o modelo.

O código fonte, salvo no editor de texto com o nome “Um.mod”, do modelo matemático (Quadro 2) implementado para resolver o problema enunciado no Quadro 1, pode ser observado no Quadro 3. A extensão “mod” é usada para identificar um arquivo GMPL (*GNU Mathematical Programming Language*) *MODel File*.

Quadro 3- Implementação do modelo matemático no GUSEK.

```
# (1) Variáveis de decisão
var xb >=0; var xl >=0;

# (2) Conjunto de restrições
subject to R1: 4*xb+2*xl<=80;
subject to R2: 2*xb+5*xl<=120;

# (3) Função objetivo
maximize Z: 3*xb+4*xl;

solve; # Executa o modelo

# Exibindo os resultados obtidos com a solução do modelo
printf "\n +-----------------------------------------+";
printf "\n | Lucro Máximo = $%.0f (%.0f básico, %.0f luxo) |", Z, xb, xl;
printf "\n +-----------------------------------------+\n\n";
end;
```

[2] Equação linear é uma equação envolvendo apenas somas ou produtos de constantes e variáveis do primeiro grau, por exemplo, 3x + 5 = 8.

A execução da solução implementada, apresentada na Figura 1, mostra como resultado que o valor do lucro maximizado é de $110 unidades monetárias e, para atingi-lo, deverão ser produzidos 10 produtos básico e 20 produtos luxo.

```
>D:\Doutorado\Otimização de Sistemas\gusek\glpsol.exe --cover --clique --gomory --mir -m "Um.mod"
GLPSOL: GLPK LP/MIP Solver, v4.47
Parameter(s) specified in the command line:
 --cover --clique --gomory --mir -m Um.mod
Reading model section from Um.mod...
17 lines were read
Generating R1...
Generating R2...
Generating Z...
Model has been successfully generated
GLPK Simplex Optimizer, v4.47
3 rows, 2 columns, 6 non-zeros
Preprocessing...
2 rows, 2 columns, 4 non-zeros
Scaling...
 A: min|aij| = 2.000e+000  max|aij| = 5.000e+000  ratio = 2.500e+000
Problem data seem to be well scaled
Constructing initial basis...
Size of triangular part = 2
*     0: obj =   0.000000000e+000  infeas = 0.000e+000 (0)
*     2: obj =   1.100000000e+002  infeas = 0.000e+000 (0)
OPTIMAL SOLUTION FOUND
Time used:   0.0 secs
Memory used: 0.1 Mb (108024 bytes)

 +-----------------------------------------+
 | Lucro Máximo = $110 (10 básico, 20 luxo) |
 +-----------------------------------------+

Model has been successfully processed
>Exit code: 0    Time: 0.226
```

Figura 1- Resultado da execução do modelo matemático implementado no GUSEK.

DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

O presente trabalho destaca a importância da Pesquisa Operacional (PO) como ramo interdisciplinar da matemática aplicada que faz uso de modelos matemáticos e algoritmos fornecendo ferramentas quantitativas como forma de apoiar o processo de tomada de decisões. Particular atenção foi dada à Programação Linear (PL), uma das técnicas de sucesso da PO, que utiliza um conjunto de equações/inequações para representar relacionamentos de estruturas reais. Em um modelo matemático de PL, são incluídos três conjuntos principais de elementos: (*i*) as variáveis de decisão e parâmetros; (*ii*) um conjunto de restrições; e, (*iii*) uma função objetivo, ou função de avaliação do sistema. Um estudo de caso de PL foi apresentado (Quadro 1), bem como a modelagem em PL (Quadro 2). Adicionalmente, destacou-se o uso do GUSEK, um *software* livre destinado à modelagem e resolução de modelos de PL. Assim, foi apresentada a implementação no ambiente GUSEK do estudo de caso proposto (Quadro 3), evidenciando-se o ponto ótimo de operação do sistema, conforme Figura 1.

REFERÊNCIAS

[1] LISBOA, E.F.A. **Pesquisa Operacional**. Apostila da disciplina. Rio de Janeiro-RJ. Disponível em <http://www.ericolisboa.eng.br/cursos/apostilas/po/index.htm>. Acesso em 24 jun. 2013.

[2] MAGATÃO, L. **Otimização de Sistemas**. Notas de aulas da disciplina. Curitiba-PR. Disponível em <http://pessoal.utfpr.edu.br/magatao/osi/>. Acesso em 24 jun. 2013.

[3] PUCCINI, A.L.; PIZZOLATO, N.D. **Programação Linear**. 2ª Ed. Livros Técnicos. Rio de Janeiro-RJ, 1990.

[4] GUSEK. **Página Oficial do Ambiente de Modelagem GUSEK**. Disponível em <http://gusek.sourceforge.net/gusek_ptbr.html>. Acesso em 24 jun. 2013.

[5] SCITE. **SCIntilla Text Editor**. Disponível em <http://www.scintilla.org/SciTE.html>. Acesso em 24 jun. 2013.

[6] GLPK. **Solver GNU Linear Programming Kit (GLPK)**. Disponível em <http://www.gnu.org/software/glpk/>. Acesso em 24 jun. 2013.